Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции.

Пусть на плоскости  дана фигура, ограниченная отрезком  оси , прямыми ,  и графиком непрерывной неотрицательной функции  на . Это криволинейная трапеция, площадь  которой может быть вычислена по формуле

.

*y=f(x)*

*x=a*

*x=b*

*x*

*y*

Рисунок 6

Если на отрезке  функция , то площадь фигуры, изображенной на рисунке 6, находят следующим образом:



*y=f(x)*

*x=a*

*x=b*

*x*

*y*

Рисунок 7

*y=g(x)*

Рисунок 8

*a*

*b x*

*y=f(x)*

*y=g(x)*

*y*

Для нахождения площадей фигур, изображенных на рисунках 7 и 8, применяют формулу:



где функции  и  удовлетворяют условию  для всех . Пределы интегрирования *a* и *b* в случае фигуры с рисунка 8 находят из решения системы .

Если фигура сверху или снизу ограничена графиками нескольких функций, то ее приходится делить на части прямыми, параллельными оси *Oy* и проходящими через точки пересечения графиков функций. Площадь каждой части находится по формулам, рассмотренным выше, в соответствии с видом фигуры.

*y=c*

*y=d*

*x=φ(y)*

*x=ψ(y)*

*y*

*x*

Рисунок 9

Для нахождения площади фигуры, изображенной на рисунке 9, применяют формулу:



*Пример 1.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: ,, .

*y=2*

*y=4x*

*B*

Рисунок 10

1\2 2 *x*

*y=4/x*

*C*

*A*

*D*

*y*

4

Строим линии , ,  и выделяем штриховкой фигуру, ограниченную этими линиями (см. рис. 10). Наиболее рациональный способ нахождения площади данной фигуры с использованием формулы .

Для этого уравнения  и , графики которых ограничивают фигуру справа и слева, разрешаем относительно *x*:

 .

Чтобы найти верхний предел интегрирования *d*, нужно определить ординату точки *В* как точки пересечения прямой  и гиперболы . Решаем систему уравнений .



**2. Длина дуги кривой.** Пусть плоская кривая  задана уравнением , , где  - непрерывная на  функция. Разобьем кривую  на  произвольных частей точками , , , , , , ,  в направлении от  к . Соединив соседние точки хордами, получим некоторую вписанную в кривую  ломаную, длину которой обозначим через . Через  обозначим длину одного звена  ломаной, а через .

**Определение.** Число  называется пределом длин ломаных  при  (), если для   такое, что для всякой ломаной, у которой , выполняется неравенство .

Если существует предел  длин  вписанных в кривую ломаных при , то этот предел называется длиной дуги .

Если функция  непрерывна вместе с  на , то длина  дуги  выражается формулой

.

*Доказательство.* Обозначим через  координаты точки , так что для абсцисс этих точек получим: ******. Тогда длина одного звена ломаной равна . По формуле Лагранжа , .

Следовательно, , . Таким образом, длина всей ломаной равна . Правая часть – интегральная сумма, а  непрерывна на .

**3. Объем тела вращения.** Пусть функция  непрерывна и неотрицательна на . Тогда тело, которое образуется вращением вокруг оси  криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции , имеет объем

.

*Доказательство.* Разобьем произвольно отрезок  на  частей точками ******. На каждом частичном отрезке ****** построим прямоугольник. При вращении вокруг оси  каждый прямоугольник опишет цилиндр. Найдем объем -го цилиндра, образованного вращением прямоугольника:

, где .

Сумма объемов всех  цилиндров приближенно равна объему данного тела вращения:

.

Далее аналогично 1.

Объем тела, полученного вращением вокруг оси  фигуры, ограниченной справа графиком функции , слева осью , снизу и сверху прямыми  и  (см. рис. 12), вычисляется по формуле

*y=c*

*y=d*

*y*

*x*

*x=g(y)*

Рисунок 12



*Пример 2.* Найти объемы тел, полученных вращением вокруг осей  и  фигуры, ограниченной линиями ,  и .

*Решение.* Строим фигуру, ограниченную линиями ,  и  (см. рис.13). Искомый объем  можно найти как разность объемов тел, полученных вращением вокруг оси  фигур  и , т.е. (ед.3).

Объем  можно найти как разность объемов тел, полученных вращением вокруг оси  фигур  и , т.е.

*y=11*

*x=2*

*1*

*y=x2*

*y*

*x*

Рисунок 13

*A*

*B*

*C*

*D*

*F*

*N*

*O*



(куб.ед.).

**4. Площадь поверхности вращения.** Пусть функция  неотрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной на . Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси , имеет площадь , которая может быть вычислена по формуле



Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 8, параграф 41.
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 11 п. 11.6